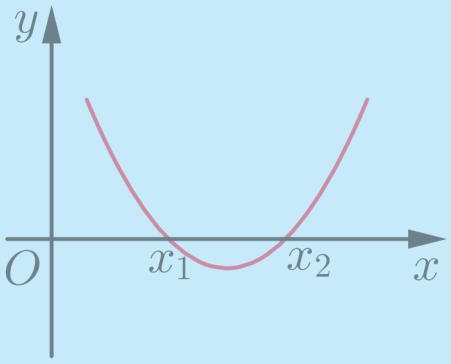
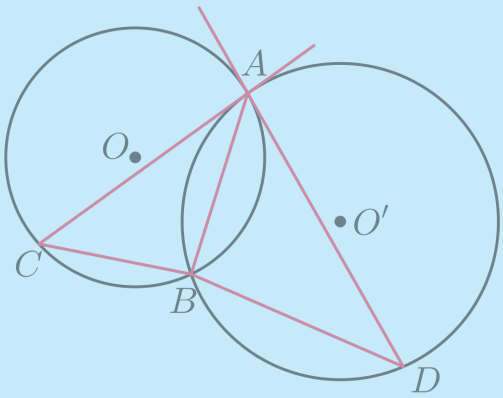
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

初高中数学衔接教程

浙江兰溪第一中学　陈晓　编写





前　言

高中教学与初中教学相比，在教学要求、教学进度与教学方式、知识体系、学习方法、思维层次、能力要求等诸方面都有较大的变化. 受这些变化影响，有相当的学生不能一下子适应高中学习，学习积极性受到一定的挫伤. 因此，如何采取有效的措施做好衔接，是摆在我们师生面前的一个共同的课题. 我们希望通过本教程的使用能使衔接变得更自然一些，能使同学们在高中起始阶段的学习中少走弯路，从而能使对高中课程的学习变得更为顺利.

本套教程使用 LaTeX 排版，在编排过程中得到了许多 LaTeX 大佬的帮助，在此一并感谢！

我们的口号是

LaTeX 中国化！

LaTeX 中学化！

1.9.3 1234

1.9.2 123

1.9.1 12

1.8.3 1234

1.8.2 123

1.8.1 12

1.7.3 1234

1.7.2 123

1.7.1 12

1.6.3 1234

1.6.2 123

1.6.1 12

目录 Contents

1.10 多项式除法 5 ····· 11

1.9 多项式除法 4 ····· 11

1.8 多项式除法 3 ····· 10

第一章 因式分解

1.1 完全平方公式 ····· 1

1.2 立方和与立方差公式 ····· 2

1.3 十字相乘法 ····· 4

1.4 分组分解法 ····· 7

1.5 添项、拆项法 ····· 8

1.6 多项式除法 1 ····· 10

1 第一章　因式分解

把一个多项式在一个范围内化为几个整式的积的形式，这种式子变形叫做这个多项式的因式分解，也叫作把这个多项式分解因式.

因式分解是中学数学中最重要的恒等变形之一，它被广泛地应用于初等数学之中，在数学求根作图、解一元二次方程方面也有很广泛的应用，是解决许多数学问题的有力工具.

1.1 完全平方公式

知识回顾

我们在初中阶段已经学习了两数和（差）的完全平方公式：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \tag{1.1}$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \tag{1.2}$$

上述两式分别相加、相减就可得到：

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2) \tag{1.3}$$

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab \tag{1.4}$$

公式 (1.3), (1.4) 将以向量的形式出现在平面向量的应用中.

例 1 计算：$(1+\sqrt{2})^4-(1-\sqrt{2})^4$.

三数和的完全平方公式

三数和的完全平方公式：

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) \tag{1.5}$$

先直接用平方差公式，然后再结合两数和与差的完全平方公式的变形.

例 2 若 $a,b,c>0$，且 $a^2+2ab+2ac+4bc=12$，则 $a+b+c$ 的最小值是

解析 由题意可得

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\\&=b^2+c^2+2bc+12-4bc\end{aligned}$$

用乘法公式展开即可证明公式 (1.5).

阅读使人充实，会谈使人敏捷，写作使人精确. ——培根

本例的解答利用了 $(b-c)^2$ 的非负性.

$$=12+(b-c)^2\geqslant 12$$

又因为 $a,b,c>0$，所以 $a+b+c\geqslant 2\sqrt{3}$，此时 $c=b<\sqrt{3}$，$a=2\sqrt{3}-2b$. 故正确答案为 A.

问题与思考

1 已知 $a+b+c=4$，$ab+bc+ac=4$，求 $a^2+b^2+c^2$ 的值.

2 若 $x^2+\frac{1}{2}mx+k$ 是一个完全平方式，求 k 的值.

3 若实数 x,y,z 满足 $(x-z)^2-4(x-y)(y-z)=0$，求证：$x+z=2y$.

4 已知 $(a+b+c)^2=3(ab+bc+ac)$，求证：$a=b=c$.

5 已知 a,b,c 均为正数，若 $(a+2b+3c)^2=14(a^2+b^2+c^2)$，试判断以 a,b,c 为边能否构成三角形？并说明理由.

6 已知 $x-\frac{1}{x}=3$，求 $x^4+\frac{1}{x^4}$ 的值.

7 长方体的三条棱长为 a,b,c 满足 $2b=a+c$，它的对角线长为 $\sqrt{14}$ cm，表面积为 22 cm^2，求此长方体的体积.

8 求证：$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\geqslant 0$.

1.2 立方和与立方差公式

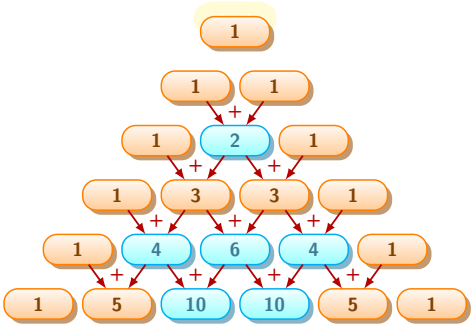
完全立方公式

我们把两数和或差的完全平方拓展至两数和或差的完全立方，即：

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{1.6}$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \tag{1.7}$$

请读者自行证明公式 (1.6),(1.7).

下面的数阵可被看成 $(a+b)^n$ 展开式的系数



杨辉，字谦光，汉族，钱塘（今浙江杭州）人，南宋杰出的数学家、数学教育家. 主要数学著作有《详解九章算法》,《日用算法》,《杨辉算法》等.

这就是著名的**杨辉三角**.

由此我们可以轻松得出

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

例 1 求 $(a+b)^5$ 的展开式.

解析 杨辉三角第 6 行为：

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

所以

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^3 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

立方和与立方差公式

根据公式 (1.6) 可知

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 \\ &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) \\ &= (a+b)((a+b)^2 - 3ab) \\ &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \end{aligned}$$

我们把平方差公式拓展至立方和与立方差公式：

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \tag{1.8}$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \tag{1.9}$$

请读者自行证明公式 (1.9).

例 2 计算：$(4+m)(16-4m+m^2)$.

解析 根据公式 (1.8)，原式 $= 4^3 + m^3 = 64 + m^3$.

例 3 已知 $x^2 - 3x + 1 = 0$，求 $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$ 的值.

解析 因为 $x \neq 0$ 且

$$x\left(x+\frac{1}{x}-3\right)=0$$

所以

$$x+\frac{1}{x}=3.$$

所以

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)\\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\right]\\ &= 3\times(3^2-3)=18.\end{aligned}$$

这里还用到了完全平方公式的一个变形：
$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab.$

例 4 已知 $a>0, b>0$，且 $a\neq b$，证明：$a^5+b^5>a^3b^2+a^2b^3$.

证明 因为

这里利用**作差法**比较两数的大小.

$$\begin{aligned}a^5+b^5-(a^3b^2+a^2b^3) &= (a^5-a^3b^2)+(b^5-a^2b^3)\\ &= a^3(a^2-b^2)-b^3(a^2-b^2)\\ &= (a^2-b^2)(a^3-b^3)\\ &= (a-b)^2(a+b)(a^2+ab+b^2)>0\end{aligned}$$

所以 $a^5+b^5>a^3b^2+a^2b^3$.

问题与思考

1 因式分解：

2 化简下列各式：

3 已知 $a\neq 0$，且 $x^3+3x^2-a^3-3a^2=(x-b)(x-a)^2$，求实数 a, b 的值.

4 观察下列各式：

$$(1-x)(1+x)=1-x^2,$$

$$(1-x)(1+x+x^2)=1-x^3$$

$$\cdots\cdots$$

完成下面各小题.

1.3 十字相乘法

$ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 型

若将一个二次三项式的二次项 ax^2 分解成 a_1x, a_2x，将常数项 c 分解为 c_1, c_2. 如图 1-1，按斜线交叉相乘再相

加，得到 $(a_1c_2+a_2c_1)x$，如果它恰好等于一次项 bx，那么 ax^2+bx+c 就可分解为 $(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$.

这种借助画十字交叉线分解系数，从而将二次三项式分解因式的方法，叫做**十字相乘法**.

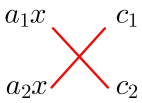


图 1-1

例 1 因式分解：

解析 (1) 如图1-2，$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$.

(2) 如图1-3，$-3x^2+x+14=-(x+2)(3x-7)$.

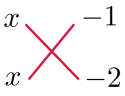


图 1-2

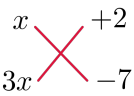


图 1-3

(3) 如图1-4，$x^2+(m-2)x+(m-3)=(x+1)(x+m-3)$.

(4) 如图1-5，$ax^2-(2a+1)x+2=(x-2)(ax-1)$.

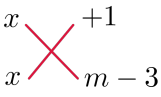


图 1-4

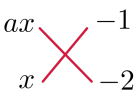


图 1-5

$xy+x+y+1$ 型

下面将十字相乘法推广至一类特殊的 $xy+x+y+1$ 型.

例 2 因式分解：$xy+x+y+1$.

解析 如图 1-6，$xy+x+y+1=(x+1)(y+1)$.



图 1-6

双十字相乘法

下面讨论用十字相乘法分解某些二元二次六项式：

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f.$$

例 3 因式分解：$2x^2-7xy-22y^2-5x+35y-3$.

解析 我们先把原式整理成关于 x 的二次三项式，即

$$2x^2-(5+7y)x-(22y^2-35y+3).$$

把 x 看作主元，y 看作常数，体现了**主元思想**.

对于常数项而言，它是关于 y 的二次三项式，也可以用十字相乘法（如图1-7）. 即

$$-22y^2+35y-3=(2y-3)(-11y+1).$$

再利用十字相乘法对关于 x 的二次三项式分解（如图1-8）.
所以，

$$\begin{aligned}\text{原式} &= [x+(2y-3)][2x+(-11y+1)]\\ &= (x+2y-3)(2x-11y+1).\end{aligned}$$

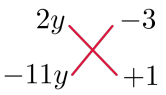


图 1-7

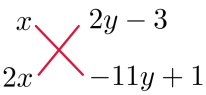


图 1-8

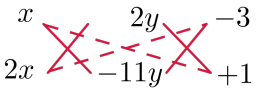


图 1-9

上述过程实施了两次十字相乘法，把它们合在一起，可得图1-9 它表示下列关系：

$$-11xy+4xy=-7xy,$$

$$2y+33y=35y,$$

$$x-6x=-5x.$$

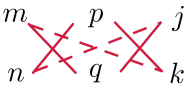


图 1-10

如图1-10，对于某个二次二元六项式 $ax^2+bxy+cy^2+ey+f$，将 a 分解成 mn 乘积作为第一列，c 分解为 pq 乘积作为第二列，f 分解为 jk 乘积作为第三列. 如果满足：

$$mq+np=b,$$

$$pk+qj=e,$$

$$mk+nj=d.$$

则

$$ax^2+bxy+cy^2+ey+f=(mx+py+j)(nx+qy+k).$$

上述操作过程即为**双十字相乘法**.

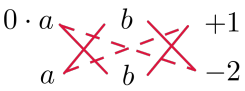


图 1-11

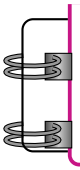
例 4 因式分解：$ab+b^2+a-b-2$.

解析 如图1-11，补上 $0\cdot a^2$ 一项，则

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 0\cdot a^2+ab+b^2+a-b-2\\ &= (0\cdot a+b+1)(a+b-2)\\ &= (b+1)(a+b-2).\end{aligned}$$

问题与思考

1. 因式分解：
2. 求方程 $xy-x-y+1=3$ 的整数解.
3. 已知 $x^2+ax-12$ 能分解为两个整系数的一次因式乘积，则符合条件的整数 a 有几个？



4 若 $x^2-y^2+mx+5y-6$ 能分解为两个一次因式的积，求 m 的值.

5 已知 a,b,c 为互不相等的实数，且满足 $(a-c)^2=4(b-a)(c-b)$，求证：$a+c=2b$.

1.4 分组分解法

我们看下面这个多项式

$$am+an+bm+bn, \qquad ①$$

要把这个多项式分解因式，不能提公因式也不能用公式.

这里我们把它的前两项分成一组并提出公因式 a，把它的后两项分成一组，并提出公因式 b，从而得到

$$a(m+n)+b(m+n), \qquad ②$$

这时由于②又有公因式 $(m+n)$，于是继续提取公因式 $(m+n)$，得到

$$(m+n)(a+b), \qquad ③$$

所以 $am+an+bm+bn=(m+n)(a+b)$.

这种把多项式分成几组来分解因式的方法叫**分组分解法**.

按字母特征分组

例 1 因式分解：$a^2-ab+ac-bc$.

解析 原式 $=a(a-b)+c(a-b)$

$=(a+c)(a-b)$.

含字母 c 的为一组，剩下含字母 a 的为一组，最后提取公因式 $(a-b)$.

按字母特征分组

例 2 因式分解：$a^2-ab+ac-bc$.

解析 原式 $=a(a-b)+c(a-b)$

$=(a+c)(a-b)$.

按系数特征分组

例 3 因式分解：$a-ab+3b-3a$.

本题多项式的前两项系数之比

解析 原式 $=(a^2-ab)-(3a-3b)$

$=a(a-b)-3(a-b)$

$=(a-3)(a-b).$

按指数特征分组

例 4 因式分解：x^2+x-4y^2-2y.

解析

本题有两个二次项，两个一次项，故按多项式的次数分组.

原式 $=(x^2-4y^2)+(x-2y)$

$=(x-2y)(x+2y)+(x-2y)$

$=(x-2y)(x+2y+1).$

按公式特征分组

例 5 因式分解：x^2-y^2-2y-1.

解析 原式 $=x^2-(y^2+2y+1)$

本题分组的目的是可以使用公式法（平方差公式、完全平方公式等）因式分解.

$=x^2-(y+1)^2$

$=(x-y-1)(x+y+1).$

综合应用

请读者把握合理分组，如可提取公因式或使用乘法公式.

例 6 已知 $a\geqslant b>0$，求证 $2a^3-b^3\geqslant 2ab^2-a^2b$.

证明 因为 $a\geqslant b>0$，所以

$2a^3-b^3-(2ab^2-a^2b)=2a^3-2ab^2+(a^2b-b^3)$

$=2a(a^2-b^2)+b(a^2-b^2)$

$=(2a+b)(a^2-b^2)$

$=(2a+b)(a+b)(a-b)\geqslant 0.$

所以 $2a^3-b^3\geqslant 2ab^2-a^2b$.

1.5 添项、拆项法

在多项式乘法运算时，经过整理、化简通常将几个同类项合并为一项，或将两个“只有符号相反的同类项”相互抵消为零.

因式分解是多项式乘法的逆运算，在对某些多项式分

解因式时，需要恢复那些被合并或相互抵消的项. 即把多项式中的某一项拆成两项或多项（拆项），或者在多项式中添上两个仅符号相反的项（添项）.

这就是**添项、拆项法**.

添项法，凑完全平方公式及平方差公式，这一解法最早由 19 世纪法国数学家苏菲·热门提出. 人们为了纪念苏菲·热门给出的这一解法，就把它叫作“热门定理”.

例 1 因式分解：x^4+4.

解析

$$\begin{aligned}\text{原式} &= x^4+4x^2+4-4x^2\\ &=(x^2+2)^2-4x^2\\ &=(x^2+2)^2-(2x)^2\\ &=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2).\end{aligned}$$

例 2 因式分解：x^3-9x+8.

解析 将常数项 8 拆成 $-1+9$，

$$\begin{aligned}\text{原式} &= x^3-9x-1+9\\ &=(x^3-1)-9(x-1)\\ &=(x-1)(x^2+x+1)-9(x-1)\\ &=(x-1)(x^2+x-8).\end{aligned}$$

本题还可以这样：
（1）将一次项 $-9x$ 拆成 $-x-8x$；
（2）将三次项 x^3 拆成 $9x^3-8x^3$；
（3）增加两项 $-x^2+x^2$.

例 3 正数 a,b,c 满足 $3+a^2+b^2+c^2\leqslant ab+3b+2c-1$，求 a,b,c 的值.

解析 把已知条件变形得

$$a^2-ab+\frac{b^2}{4}+\frac{3b^2}{4}-3b+3+c^2-2c+1\leqslant 0.$$

本题的关键是把 b^2 拆成 $\frac{b^2}{4}+\frac{3b^2}{4}$，从而为配方创造条件.

不等式左边配方得

$$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+3\left(\frac{b}{2}-1\right)^2+(c-1)^2\leqslant 0.$$

又因为

$$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+3\left(\frac{b}{2}-1\right)^2+(c-1)^2\geqslant 0.$$

所以

$$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+3\left(\frac{b}{2}-1\right)^2+(c-1)^2=0.$$

于是

$$\begin{cases}a-\dfrac{2}{b}=0,\\ \dfrac{b}{2}-1=0,\\ c-1=0.\end{cases}$$

故 $a=1,b=2,c=1$.

例 4 若 a,b,c 满足 $a^2+b^2+c^2=9$，求代数式 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ 的最大值.

解析 由题意得

$$\begin{aligned}(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2&=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac\\&=3(a^2+b^2+c^2)-(a^2+b^2+c^2)-2ab-\\&=3(a^2+b^2+c^2)-(a^2+b^2+c^2+2ab+\\&=3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2\\&=27-(a+b+c)^2\leqslant 27.\end{aligned}$$

1.6 多项式除法 1

1.6.1 12

1.6.2 123

1.6.3 1234

1.7 多项式除法 2

1.7.1 12

1.7.2 123

1.7.3 1234

1.8 多项式除法 3

1.8.1 12

1.8.2 123

1.8.3 1234

1.9 多项式除法 4

1.9.1 12

1.9.2 123

1.9.3 1234

1.10 多项式除法 5

1.10.1 12

1.10.2 123

1.10.3 1234

1.11 多项式除法 6

1.11.1 12

1.11.2 123

1.11.3 1234

1.12 多项式除法

设 $n \in \mathbb{N}$,我们把形如

$$A = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的代数式称为关于 x 的一元多项式.

两个重要定理

定理 1 若 a 是关于 x 的一元多项式 A 的根,则多项式 A 有一个因式 $x - a$.

人生的价值,并不是用时间,而是用深度量去衡量的. ——列夫•托尔斯泰

例 1 已知 x^3-8x+m 有因式 $x+2$，试确定 m 的值.

解析 当 $x=-2$ 时，

$$x^3-8x+m=(-2)^3-8(-2)+m=0,$$

所以 $m=-8$.

p,q 是互质的整数.

定理 2 若既约分数 $\frac{q}{p}$ 是整系数一元多项式 A 的根，则必有 p 是 a_0 的约数，q 是 a_n 的约数. 特别地，当 $a_0=1$ 时，整系数一元多项式 A 的整数根均为 a_n 的约数.

例 2 在实数范围内因式分解：x^3-4x^2+6x-4.

解析 若方程 $x^3-4x^2+6x-4=0$ 有整数根 x_0，则 x_0 必为 -4 的约数，逐个检验 -4 的约数：$\pm1,\pm2,\pm4$，只有 $x_0=2$ 是它的一个根.

下面用分组分解法，使每组都有因式 $x-2$.

$$\begin{aligned}x^3-4x^2+6x-4&=(x^3-2x^2)-(2x^2-4x)+(2x-4)\\&=x^2(x-2)-2x(x-2)+2(x-2)\\&=(x-2)(x^2-2x+2).\end{aligned}$$

多项式除法

下面把小学竖式除法的运算推广至多项式除法.

例1.12 得到多项式 x^3-4x^2+6x-4 有一个因式 $x-2$，下面用竖式除法求出该多项式的其余因式.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-2x+2 \\
\hline
x-2 & x^3-4x^2+6x-4 \\
 & \underline{x^3-2x^2} \\
 & \quad -2x^2+6x \\
 & \quad \underline{-2x^2+4x} \\
 & \qquad\quad 2x-4 \\
 & \qquad\quad \underline{2x-4} \\
 & \qquad\quad\ \ 0
\end{array}$$

x^2-2x+2 在实数范围内不能再分解！为什么？

故 $x^3-4x^2+6x-4=(x-2)(x^2-2x+2)$.

例 3 因式分解：x^3-8x+8.

解析 先用试根法求出方程 $x^3-8x+8=0$ 的一个

实根 $x=2$，故 x^3-8x+8 必有一个因式 $x-2$. 下面用竖式除法求出其余因式.

$$
\begin{array}{r}
x^2+2x-4 \\
x-2\overline{)\,x^3+0\cdot x^2-8x+8} \\
\underline{x^3-2x^2} \\
2x^2-8x+8 \\
\underline{2x^2-4x} \\
-4x+8 \\
\underline{-4x+8} \\
0
\end{array}
$$

又方程 $x^2+2x-4=0$ 的实根为

$$x_1=-1-\sqrt{5}, x_2=-1+\sqrt{5}$$

.

所以，

$$
\begin{aligned}
&x^3-8x+8 \\
=&(x-2)(x^2+2x-4) \\
=&(x-2)(x+1+\sqrt{5})(x+1-\sqrt{5}).
\end{aligned}
$$