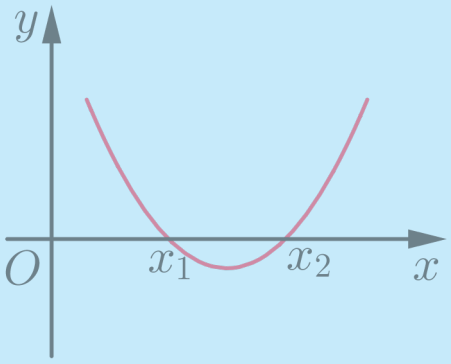
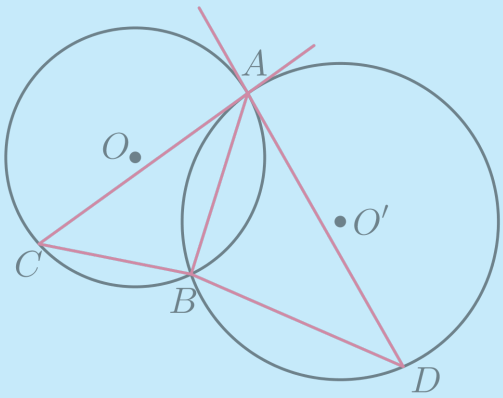
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

初高中数学衔接教程

浙江兰溪第一中学　陈晓　编写





前　言

高中教学与初中教学相比，在教学要求、教学进度与教学方式、知识体系、学习方法、思维层次、能力要求等诸方面都有较大的变化. 受这些变化影响，有相当的学生不能一下子适应高中学习，学习积极性受到一定的挫伤. 因此，如何采取有效的措施做好衔接，是摆在我们师生面前的一个共同的课题. 我们希望通过本教程的使用能使衔接变得更自然一些，能使同学们在高中起始阶段的学习中少走弯路，从而能使对高中课程的学习变得更为顺利.

本套教程使用 LaTeX 排版，在编排过程中得到了许多 LaTeX 大佬的帮助，在此一并感谢！

我们的口号是

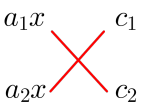
LaTeX 中国化！

LaTeX 中学化！

目录
Contents

第一章 因式分解

1.1 完全平方公式 …… 1
1.2 立方和与立方差公式 …… 2
1.3 十字相乘法 …… 5
1.4 分组分解法 …… 8
1.5 添项、拆项法 …… 10
1.6 多项式除法 …… 12



1 第一章　因式分解

把一个多项式在一个范围内化为几个整式的积的形式，这种式子变形叫做这个多项式的因式分解，也叫作把这个多项式分解因式.

因式分解是中学数学中最重要的恒等变形之一，它被广泛地应用于初等数学之中，在数学求根作图、解一元二次方程方面也有很广泛的应用，是解决许多数学问题的有力工具.

1.1 完全平方公式

知识回顾

我们在初中阶段已经学习了两数和（差）的完全平方公式：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \tag{1.1}$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \tag{1.2}$$

上述两式分别相加、相减就可得到：

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2) \tag{1.3}$$

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab \tag{1.4}$$

公式 (1.3)，(1.4) 将以向量的形式出现在平面向量的应用中.

例 1 计算：$(1+\sqrt{2})^4-(1-\sqrt{2})^4$.

解析

$$\begin{aligned}\text{原式}&=[(1+\sqrt{2})^2]^2-[(1-\sqrt{2})^2]^2\\&=[(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2]\times\\&\quad[(1+\sqrt{2})^2-(1-\sqrt{2})^2]\\&=2[(\sqrt{2})^2+1^2](4\times\sqrt{2}\times1)\\&=24\sqrt{2}.\end{aligned}$$

先直接用平方差公式，然后再结合两数和与差的完全平方公式的变形.

阅读使人充实，会谈使人敏捷，写作使人精确. ——培根

用乘法公式展开即可证明公式 (1.5).

三数和的完全平方公式

三数和的完全平方公式：

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) \tag{1.5}$$

例 2 若 $a,b,c>0$，且 $a^2+2ab+2ac+4bc=12$，则 $a+b+c$ 的最小值是

A. $2\sqrt{3}$　　B. 3　　C. 2　　D. $\sqrt{3}$

解析 由题意可得

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\\&=b^2+c^2+2bc+12-4bc\\&=12+(b-c)^2\geqslant 12\end{aligned}$$

本例的解答利用了 $(b-c)^2$ 的非负性.

又因为 $a,b,c>0$，所以 $a+b+c\geqslant 2\sqrt{3}$，此时 $c=b<\sqrt{3}$，$a=2\sqrt{3}-2b$. 故正确答案为 A.

问题与思考

1. 已知 $a+b+c=4$，$ab+bc+ac=4$，求 $a^2+b^2+c^2$ 的值.
2. 若 $x^2+\frac{1}{2}mx+k$ 是一个完全平方式，求 k 的值.
3. 若实数 x,y,z 满足 $(x-z)^2-4(x-y)(y-z)=0$，求证：$x+z=2y$.
4. 已知 $(a+b+c)^2=3(ab+bc+ac)$，求证：$a=b=c$.
5. 已知 a,b,c 均为正数，若 $(a+2b+3c)^2=14(a^2+b^2+c^2)$，试判断以 a,b,c 为边能否构成三角形？并说明理由.
6. 已知 $x-\frac{1}{x}=3$，求 $x^4+\frac{1}{x^4}$ 的值.
7. 长方体的三条棱长为 a,b,c 满足 $2b=a+c$，它的对角线长为 $\sqrt{14}$ cm，表面积为 22 cm^2，求此长方体的体积.
8. 求证：$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\geqslant 0$.

1.2 立方和与立方差公式

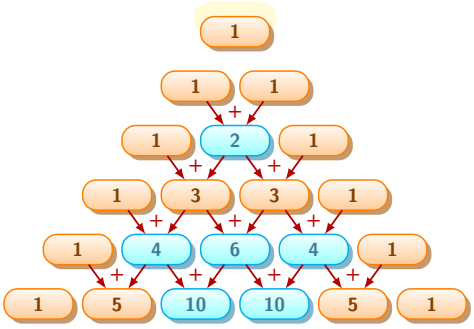
完全立方公式

我们把两数和或差的完全平方拓展至两数和或差的完全立方，即：

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{1.6}$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \tag{1.7}$$

请读者自行证明公式 (1.6),(1.7).

下面的数阵可被看成 $(a+b)^n$ 展开式的系数



杨辉，字谦光，汉族，钱塘（今浙江杭州）人，南宋杰出的数学家、数学教育家. 主要数学著作有《详解九章算法》,《日用算法》,《杨辉算法》等.

这就是著名的**杨辉三角**.

由此我们可以轻松得出

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

例 1 求 $(a+b)^5$ 的展开式.

解析 杨辉三角第 6 行为：

1 5 10 10 5 1

所以

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^3 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

立方和与立方差公式

根据公式 (1.6) 可知

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 \\ &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) \\ &= (a+b)((a+b)^2 - 3ab) \\ &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \end{aligned}$$

我们把平方差公式拓展至立方和与立方差公式：

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \tag{1.8}$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \tag{1.9}$$

请读者自行证明公式 (1.9).

例 2 计算：$(4+m)(16-4m+m^2)$.

解析 根据公式 (1.8)，原式 $= 4^3 + m^3 = 64 + m^3$.

例 3 已知 $x^2 - 3x + 1 = 0$，求 $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$ 的值.

解析 因为 $x \neq 0$ 且

$$x\left(x+\frac{1}{x}-3\right)=0$$

所以

$$x+\frac{1}{x}=3.$$

所以

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)\\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\right]\\ &= 3\times(3^2-3)=18.\end{aligned}$$

这里还用到了完全平方公式的一个变形：
$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab.$

例 4 已知 $a>0, b>0$，且 $a\neq b$，证明：$a^5+b^5>a^3b^2+a^2b^3$.

证明 因为

$$\begin{aligned}a^5+b^5-(a^3b^2+a^2b^3) &= (a^5-a^3b^2)+(b^5-a^2b^3)\\ &= a^3(a^2-b^2)-b^3(a^2-b^2)\\ &= (a^2-b^2)(a^3-b^3)\\ &= (a-b)^2(a+b)(a^2+ab+b^2)>0\end{aligned}$$

这里利用**作差法**比较两数的大小.

所以 $a^5+b^5>a^3b^2+a^2b^3$.

问题与思考

1 因式分解：

(1) x^3-1　　(2) $8a^3+27b^3$

(3) $3a^3b+81b^4$　　(4) a^7-ab^6

(5) x^6-y^6　　(6) $y^2(x^2-2x)^3+y^2$

2 化简下列各式：

(1) $(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

(2) $(a-4b)\left(\frac{1}{4}a^2+4b^2+ab\right)$

3 填空，使之符合立方和或立方差公式：

(1) $(x-3)(\quad)=x^3-27$　　(2) $(x^2+2)(\quad)=x^6+8$

(3) $\left(\frac{m}{2}-n\right)(\quad)=\frac{m^3}{8}-n^3$　　(4) $\left(4y-\frac{1}{5}x\right)(\quad)=64y^3-\frac{1}{125}x^3$

4 已知 $a-b=-1$ 且 $a^2+b^2=5$，求下列各式的值：

(1) ab　　(2) a^3-b^3

5 已知 $m^2-3m+1=0$，求下列各式的值：

(1) $m^2+\dfrac{1}{m^2}$　　(2) $m^3+\dfrac{1}{m^3}$

6 已知 $a\neq 0$，且 $x^3+3x^2-a^3-3a^2=(x-b)(x-a)^2$，求实数 a,b 的值.

7 观察下列各式：

$$(1-x)(1+x)=1-x^2,$$

$$(1-x)(1+x+x^2)=1-x^3$$

$$\cdots\cdots$$

完成下面各小题.

(1) 计算：$(1-x)(1+x+x^2+x^3)$；

(2) 猜想：$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n)=$_____.

(3) 证明：

$$x^3+\frac{1}{x+1}\geqslant 1-x+x^2.$$

1.3 十字相乘法

$ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 型

若将一个二次三项式的二次项 ax^2 分解成 a_1x,a_2x，将常数项 c 分解为 c_1,c_2. 如图 1-1，按斜线交叉相乘再相加，得到 $(a_1c_2+a_2c_1)x$，如果它恰好等于一次项 bx，那么 ax^2+bx+c 就可分解为 $(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$.

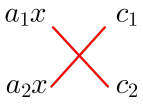


图 1-1

这种借助画十字交叉线分解系数，从而将二次三项式分解因式的方法，叫做**十字相乘法**.

例 1　因式分解：

(1) x^2-3x+2

(2) $-3x^2+x+14$

(3) $x^2+(m-2)x+(m-3)$

(4) $ax^2-(2a+1)x+2(a\neq 0)$

解析　(1) 如图 1-2，$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$.

(2) 如图 1-3，$-3x^2+x+14=-(x+2)(3x-7)$.

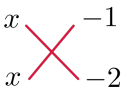


图 1-2

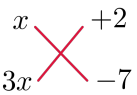


图 1-3

(3) 如图 1-4，$x^2+(m-2)x+(m-3)=(x+1)(x+m-3)$.

(4) 如图 1-5，$ax^2-(2a+1)x+2=(x-2)(ax-1)$.

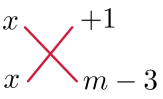


图 1-4

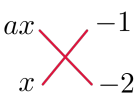


图 1-5

$xy+x+y+1$ 型



图 1-6

下面将十字相乘法推广至一类特殊的 $xy+x+y+1$ 型.

例 2 因式分解：$xy+x+y+1$.

解析 如图 1-6，$xy+x+y+1=(x+1)(y+1)$.

双十字相乘法

下面讨论用十字相乘法分解某些二元二次六项式：

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f.$$

例 3 因式分解：$2x^2-7xy-22y^2-5x+35y-3$.

解析 我们先把原式整理成关于 x 的二次三项式，即

$$2x^2-(5+7y)x-(22y^2-35y+3).$$

把 x 看作主元，y 看作常数，体现了**主元思想**.

对于常数项而言，它是关于 y 的二次三项式，也可以用十字相乘法(如图 1-7). 即

$$-22y^2+35y-3=(2y-3)(-11y+1).$$

再利用十字相乘法对关于 x 的二次三项式分解(如图 1-8). 所以，

$$\begin{aligned}\text{原式}&=[x+(2y-3)][2x+(-11y+1)]\\&=(x+2y-3)(2x-11y+1).\end{aligned}$$

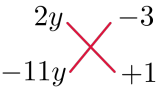


图 1-7

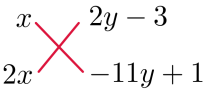


图 1-8

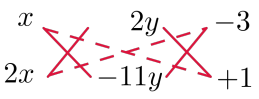


图 1-9

上述过程实施了两次十字相乘法，把它们合在一起，可得图 1-9 它表示下列关系：

$$-11xy+4xy=-7xy,$$

$$2y+33y=35y,$$

$$x-6x=-5x.$$

如图 1-10，对于某个二次二元六项式 $ax^2+bxy+cy^2+ey+f$，将 a 分解成 mn 乘积作为第一列，c 分解为 pq 乘积作为第二列，f 分解为 jk 乘积作为第三列. 如果满足：

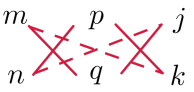


图 1-10

$$mq+np=b,$$

$$pk+qj=e,$$

$$mk+nj=d.$$

则

$$ax^2+bxy+cy^2+ey+f=(mx+py+j)(nx+qy+k).$$

上述操作过程即为**双十字相乘法**.

例 4 因式分解：$ab+b^2+a-b-2$.

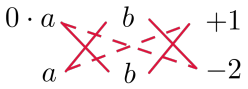


图 1-11

解析 如图 1-11，补上 $0\cdot a^2$ 一项，则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=0\cdot a^2+ab+b^2+a-b-2\\&=(0\cdot a+b+1)(a+b-2)\\&=(b+1)(a+b-2).\end{aligned}$$

问题与思考

1 因式分解：

(1) $x^2+13x+36$　　(2) $x^2-2x-15$

(3) $x^2+5x-24$　　(4) $12x^2-5x-2$

(5) $-2x^2+3x-1$　　(6) $\frac{2}{9}x^2+\frac{1}{3}x-1$

(7) x^4-7x^2-18　　(8) $(6x^2-7x)^2-25$

2 因式分解：

(1) $(a-b)^2+11(a-b)+28$　　(2) $m^2-4mn-5n^2$

(3) $8x^2+26xy-15y^2$　　(4) $2x^2+xy-y^2-4x+5y-6$

3 解下列关于 x 的方程：

(1) $x^2+a(2x+a)-x-a=0$

(2) $x^2+5x+k^2=2kx+5k-6$

(3) $x^2-(n^2+n-1)x-(n^2+n)=0$

(4) $x^2-(n^2+n-3)x-3(n^2+n)=0$

4 求方程 $xy-x-y+1=3$ 的整数解.

5 已知 $x^2+ax-12$ 能分解为两个整系数的一次因式乘积，则符合条件的整数 a 有几个？

6 若 $x^2-y^2+mx+5y-6$ 能分解为两个一次因式的积，求 m 的值.

穷则独善其身，达则兼济天下. ——孟子

7 已知 a,b,c 为互不相等的实数，且满足 $(a-c)^2=4(b-a)(c-b)$，求证：$a+c=2b$.

1.4 分组分解法

我们看下面这个多项式

$$am+an+bm+bn, \qquad ①$$

要把这个多项式分解因式，不能提公因式也不能用公式.

这里我们把它的前两项分成一组并提出公因式 a，把它的后两项分成一组，并提出公因式 b，从而得到

$$a(m+n)+b(m+n), \qquad ②$$

这时由于②又有公因式 $(m+n)$，于是继续提取公因式 $(m+n)$，得到

$$(m+n)(a+b), \qquad ③$$

所以 $am+an+bm+bn=(m+n)(a+b)$.

这种把多项式分成几组来分解因式的方法叫**分组分解法**.

按字母特征分组

例 1 因式分解：$a^2-ab+ac-bc$.

解析 原式 $=a(a-b)+c(a-b)$

$=(a+c)(a-b)$.

含字母 c 的为一组，剩下含字母 a 的为一组，最后提取公因式 $(a-b)$.

按字母特征分组

例 2 因式分解：$a^2-ab+ac-bc$.

解析 原式 $=a(a-b)+c(a-b)$

$=(a+c)(a-b)$.

按系数特征分组

例 3 因式分解：$a-ab+3b-3a$.

解析 原式 $=(a^2-ab)-(3a-3b)$

本题多项式的前两项系数之比与后两项系数之比恰好相等，即

$$= a(a-b) - 3(a-b)$$
$$= (a-3)(a-b).$$

按指数特征分组

例 4 因式分解：$x^2 + x - 4y^2 - 2y$.

解析

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (x^2 - 4y^2) + (x - 2y)\\ &= (x-2y)(x+2y) + (x-2y)\\ &= (x-2y)(x+2y+1).\end{aligned}$$

本题有两个二次项，两个一次项，故按多项式的次数分组.

按公式特征分组

例 5 因式分解：$x^2 - y^2 - 2y - 1$.

解析 原式 $= x^2 - (y^2 + 2y + 1)$
$= x^2 - (y+1)^2$
$= (x - y - 1)(x + y + 1).$

本题分组的目的是可以使用公式法（平方差公式、完全平方公式等）因式分解.

综合应用

例 6 已知 $a \geqslant b > 0$，求证 $2a^3 - b^3 \geqslant 2ab^2 - a^2b$.

证明 因为 $a \geqslant b > 0$，所以

$$\begin{aligned}2a^3 - b^3 - (2ab^2 - a^2b) &= 2a^3 - 2ab^2 + (a^2b - b^3)\\ &= 2a(a^2 - b^2) + b(a^2 - b^2)\\ &= (2a+b)(a^2 - b^2)\\ &= (2a+b)(a+b)(a-b) \geqslant 0.\end{aligned}$$

所以 $2a^3 - b^3 \geqslant 2ab^2 - a^2b$.

请读者把握合理分组，如可提取公因式或使用乘法公式.

问题与思考

1 因式分解：

(1) $ab - a - b + 1$
(2) $7x^2 + 3y + xy + 21x$
(3) $a^2 - 9b^2 + 2a - 6b$
(4) $a^2 + 2ab + ac + bc + b^2$
(5) $a^2 - 4b^2 + 12ac - 9c^2$
(6) $x^3 + 9 + 3x^2 + 3x$
(7) $5x^2 + 6y - 15x - 2xy$
(8) $ab(c^2 - d^2) - (a^2 - b^2)cd$
(9) $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$
(10) $x^2 - 4y^2 - z^2 + 4yz$

君子之交淡若水，小人之交甘若醴，君子淡以亲，小人甘以绝. ——庄子

2 在 $\triangle ABC$ 中，a,b,c 为三边长，且 $a^2c^2-a^4=b^2c^2-b^4$，试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

3 证明：$a^2+b^2+5\geqslant 2(2a-b)$.

4 已知一个凸四边形 $ABCD$ 的四条边的长顺次为 a,b,c,d，且 $a^2+ab-ac-bc=0$，$b^2+bc-bd-cd=0$，那么四边形 $ABCD$ 是

A. 平行四边形　　B. 矩形　　C. 菱形　　D. 梯形

5 已知 $a+b+c=0$，求证：$a^3+a^2c+b^2c-abc+b^3=0$.

6 证明：当 n 为大于 2 的整数时，$120\mid(n^5-5n^3+4n)$.

7 已知三条线段长分别为 a,b,c，且满足 $a>b$，$a^2+c^2<b^2+2ac$，证明：以 a,b,c 三边能构成三角形.

1.5 添项、拆项法

在多项式乘法运算时，经过整理、化简通常将几个同类项合并为一项，或将两个“只有符号相反的同类项”相互抵消为零.

因式分解是多项式乘法的逆运算，在对某些多项式分解因式时，需要恢复那些被合并或相互抵消的项. 即把多项式中的某一项拆成两项或多项（拆项），或者在多项式中添上两个仅符号相反的项（添项）.

这就是**添项、拆项法**.

添项法，凑完全平方公式及平方差公式，这一解法最早由 19 世纪法国数学家苏菲·热门提出. 人们为了纪念苏菲·热门给出的这一解法，就把它叫作“热门定理”.

例 1　因式分解：x^4+4.

解析

$$\begin{aligned}\text{原式}&=x^4+4x^2+4-4x^2\\&=(x^2+2)^2-4x^2\\&=(x^2+2)^2-(2x)^2\\&=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2).\end{aligned}$$

例 2　因式分解：x^3-9x+8.

解析　将常数项 8 拆成 $-1+9$，

$$\begin{aligned}\text{原式}&=x^3-9x-1+9\\&=(x^3-1)-9(x-1)\\&=(x-1)(x^2+x+1)-9(x-1)\\&=(x-1)(x^2+x-8).\end{aligned}$$

本题还可以这样：

(1)将一次项 $-9x$ 拆成 $-x-8x$；

(2)将三次项 x^3 拆成 $9x^3-8x^3$；

(3)增加两项 $-x^2+x^2$.

例 3 正数 a,b,c 满足 $3+a^2+b^2+c^2 \leqslant ab+3b+2c-1$，求 a,b,c 的值.

解析 把已知条件变形得

$$a^2-ab+\frac{b^2}{4}+\frac{3b^2}{4}-3b+3+c^2-2c+1 \leqslant 0.$$

本题的关键是把 b^2 拆成 $\frac{b^2}{4}+\frac{3b^2}{4}$，从而为配方创造条件.

不等式左边配方得

$$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+3\left(\frac{b}{2}-1\right)^2+(c-1)^2 \leqslant 0.$$

又因为

$$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+3\left(\frac{b}{2}-1\right)^2+(c-1)^2 \geqslant 0.$$

所以

$$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+3\left(\frac{b}{2}-1\right)^2+(c-1)^2 = 0.$$

于是

$$\begin{cases} a-\dfrac{2}{b}=0, \\ \dfrac{b}{2}-1=0, \\ c-1=0. \end{cases}$$

故 $a=1,b=2,c=1$.

例 4 若 a,b,c 满足 $a^2+b^2+c^2=9$，求代数式 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ 的最大值.

解析 由题意得

$$\begin{aligned}(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 &= 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac \\ &= 3(a^2+b^2+c^2)-(a^2+b^2+c^2)-2ab-2bc-2ac \\ &= 3(a^2+b^2+c^2)-(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac) \\ &= 3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2 \\ &= 27-(a+b+c)^2 \leqslant 27.\end{aligned}$$

问题与思考

1 因式分解：

(1) x^2+2x-1

(2) $x^2+4xy-4y^2$

(3) x^3+9+3x^2+3x

(4) x^3-3x^2+4

(5) x^4+4y^4

(6) $x^4+x^2+2ax+1-a^2$

(7) x^4-7x^2+1

(8) $a^2-b^2+4a+2b+3$

人生的价值，并不是用时间，而是用深度量去衡量的. ——列夫•托尔斯泰

(9) x^4+64　　(10) x^3+2x^2-5x-6

2 已知 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+14=0$，求 $x+y+z$ 的值.

3 已知 $\frac{1}{4}(b-c)^2=(a-b)(c-a)$，且 $a\neq 0$，求 $\frac{b+c}{a}$ 的值.

4 整数 a,b 满足 $6ab=9a-10b+303$，求 $a+b$ 的值.

1.6 多项式除法

设 $n\in\mathbb{N}$，我们把形如

$$A=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

的代数式称为关于 x 的一元多项式.

两个重要定理

定理 1 若 a 是关于 x 的一元多项式 A 的根，则多项式 A 有一个因式 $x-a$.

例 1 已知 x^3-8x+m 有因式 $x+2$，试确定 m 的值.

解析 当 $x=-2$ 时，

$$x^3-8x+m=(-2)^3-8(-2)+m=0,$$

所以 $m=-8$.

p,q 是互质的整数.

定理 2 若既约分数 $\frac{q}{p}$ 是整系数一元多项式 A 的根，则必有 p 是 a_0 的约数，q 是 a_n 的约数. 特别地，当 $a_0=1$ 时，整系数一元多项式 A 的整数根均为 a_n 的约数.

例 2 在实数范围内因式分解：x^3-4x^2+6x-4.

解析 若方程 $x^3-4x^2+6x-4=0$ 有整数根 x_0，则 x_0 必为 -4 的约数，逐个检验 -4 的约数：$\pm1,\pm2,\pm4$，只有 $x_0=2$ 是它的一个根.

下面用分组分解法，使每组都有因式 $x-2$.

$$\begin{aligned}x^3-4x^2+6x-4&=(x^3-2x^2)-(2x^2-4x)+(2x-4)\\&=x^2(x-2)-2x(x-2)+2(x-2)\end{aligned}$$

$$= (x-2)(x^2-2x+2).$$

多项式除法

下面把小学竖式除法的运算推广至多项式除法.

例 1.6 得到多项式 x^3-4x^2+6x-4 有一个因式 $x-2$，下面用竖式除法求出该多项式的其余因式.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-2x+2 \\
\hline
x-2 & x^3-4x^2+6x-4 \\
 & \underline{x^3-2x^2} \\
 & \quad -2x^2+6x \\
 & \quad \underline{-2x^2+4x} \\
 & \qquad\quad 2x-4 \\
 & \qquad\quad \underline{2x-4} \\
 & \qquad\quad\ \ 0
\end{array}$$

x^2-2x+2 在实数范围内不能再分解！为什么？

故 $x^3-4x^2+6x-4=(x-2)(x^2-2x+2)$.

例 3 因式分解：x^3-8x+8.

解析 先用试根法求出方程 $x^3-8x+8=0$ 的一个实根 $x=2$，故 x^3-8x+8 必有一个因式 $x-2$. 下面用竖式除法求出其余因式.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x-4 \\
\hline
x-2 & x^3+0\cdot x^2-8x+8 \\
 & \underline{x^3-2x^2} \\
 & \quad 2x^2-8x \\
 & \quad \underline{2x^2-4x} \\
 & \qquad -4x+8 \\
 & \qquad \underline{-4x+8} \\
 & \qquad\quad\ \ 0
\end{array}$$

又方程 $x^2+2x-4=0$ 的实根为

$$x_1=-1-\sqrt{5}, x_2=-1+\sqrt{5}$$

.

所以，

$$\begin{aligned}
&x^3-8x+8 \\
&=(x-2)(x^2+2x-4) \\
&=(x-2)(x+1+\sqrt{5})(x+1-\sqrt{5}).
\end{aligned}$$

谁要游戏人生，他就一事无成，谁不能主宰自己，永远是一个奴隶. ——歌德

问题与思考

1 在实数范围内分解因式：

(1) $x^3+x^2-10x-6$　　(2) $2x^3-9x^2+x+12$

(3) $6x^3+x^2+7x+4$　　(4) x^3-4x^2+5x-2

2 用 x^2+x 除多项式 x^5+3x^3+4x-3 得到的余式是_____.

3 多项式 $x^4+3x^3+8x^2-kx+11$ 有一个因式 $x+3$，试求 k 的值.

4 试确定 a 和 b 的值，使 $2x^4-3x^3+ax^2+5x+b$ 被 $(x+1)(x-2)$ 整除.

5 求证：$a^3+b^3+c^3-3abc$ 能被 $a+b+c$ 整除.